



TITLE:

# 無限階方程式の最近の話題から(超局所解析と大域解析)

AUTHOR(S):

青木, 貴史

---

CITATION:

青木, 貴史. 無限階方程式の最近の話題から(超局所解析と大域解析). 数理解析研究所講究録 1985, 558: 1-4

ISSUE DATE:

1985-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99007>

RIGHT:

# 無限階方程式の最近の話題から

近畿大理工 青木 貴史

AOKI Takashi

無限階擬微分作用素の可逆性定理 ([1], Théorème 5.1) の応用として正則函数の germs の空間において指数 (index) が有限となるような無限階微分作用素の存在がわかる。以下ではこのことについて述べる。詳しくは [2] を参照されたい。

## 1. 可逆性定理の書きかえ.

表象  $P(z, \zeta)$  により定義される擬微分作用素  $P(z, \zeta)$  は  $1/P(z, \zeta)$  がまた表象となるとき  $\mathbb{R}^n$  で可逆となる ([1], Théorème 5.1). ここに仮定した条件は

$P(z, \zeta)$  の下からの評価  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon > 0 \quad |P(z, \zeta)| \geq C_\varepsilon \exp(-\varepsilon|\zeta|)$

と同値であるが  $P(z, \zeta)$  が  $\zeta$  について entire のとき, 可なり

$P(z, \zeta) := P(z, D_\zeta)$  が微分作用素の場合には表象  $P(z, \zeta)$

の零点分布についての条件に書きかえることができる ([5], Lemma

4.1.3 参照). 従って [5], Theorem 4.1.8 の変数係数への拡張が

得られる:

定理 1.  $z^* \in T^*\mathbb{C}^n$  の点,  $U \ni z^*$  の近傍とする.

$P(z, D_z) \in \pi(U)$  ( $\pi: T^*\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  射影) で定義された微分作用素 (無限階でもよい),  $P(z, \zeta)$  とその表象とする. 正定数  $R$  が存在して  $\{(z, \zeta) \in U; |\zeta| > R\}$  上  $P(z, \zeta) \neq 0$  とするならば  
 $P(z, D_z)$  は  $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n, z^*}^R$  において可逆である.

2. 指数が有限となるための条件

補題 2.  $P(z, D_z)$  は  $\mathbb{C}^n$  の原点  $0$  の近傍で定義された (有限階または無限階) 微分作用素とする.  $0$  に十分近い任意の  $z \neq 0$  に対して  $P$  は  $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n, (z, \bar{z})}^R$  において可逆と仮定すると

$$\dim \operatorname{Ker} (P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) < \infty$$

$$\dim \operatorname{Coker} (P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) < \infty$$

従って  $\operatorname{ind}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) = \dim \operatorname{Ker} P - \dim \operatorname{Coker} P < \infty$

となる. 特に  $P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$  は of closed range である. ここに  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$  は  $\mathbb{C}^n$  における正則関数の層  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$  の  $0$  における germ を表す.

証明の方針  $t > 0$  に対して  $\Omega_t = \{z \in \mathbb{C}^n \mid t - |z|^2 > 0\}$  と

おくと  $z \in \partial\Omega_t$  における  $\partial\Omega_t$  の conormal は  $(z, \bar{z}) \in T^*\mathbb{C}^n$  である.

仮定より  $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n, m}^R: 0 \leftarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}^R \xleftarrow{P} \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}^R \leftarrow 0$  は  $(z, \bar{z})$  において exact となる.

従って 柏原-Schapira の接続定理 ([4], Theorem 4.5.1) が適用

でき十分小さな任意の  $t$  と任意の  $j$  について同型

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{D}^b}^j(\bar{\Omega}_t; m, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \simeq \operatorname{Ext}_{\mathcal{D}^b}^j(\Omega_t; m, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$$

が得られる. したがって  $m = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}^\infty / \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}^\infty P$ ,  $\bar{\Omega}_t$  は  $\Omega_t$  の閉包を表わす. 特に  $j=0,1$  のときを書きかえと

$$\text{Ker}(P: \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t) \rightarrow \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t)) \cong \text{Ker}(P: \mathcal{O}(\Omega_t) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega_t)),$$

$$\text{Coker}(P: \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t) \rightarrow \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t)) \cong \text{Coker}(P: \mathcal{O}(\Omega_t) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega_t))$$

がわかる. compact perturbation についての古典的結果 (Bony-Schapira [3] 参照) により上のふたつの空間は有限次元となる.

任意の  $t > 0$  について成り立つので 帰納的極限をとれば

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Coker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$$

がわかる.

上の補題 2 と 定理 1 を組みあわせると次の定理が得られる. これは Bony-Schapira による指数有限性の定理 ([3], Théorème 5) の無限階への自然な拡張を与える.

定理 3  $P(z, D_z)$  は  $\mathbb{C}^n$  の原点の近傍で定義された (有限階または無限階) 微分作用素とする. 任意の十分小さな定数  $c > 0$  に対して正定数  $\delta, R$  が存在し  $P(z, D_z)$  の表象  $P(z, \zeta)$  は

$$\{(z, \zeta) \in T^*\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n - \{0\}) \mid \frac{c}{2} < |z|^2 < \frac{3}{2}c, |\zeta| > R, \left| \frac{\zeta}{|\zeta|} - \frac{\bar{z}}{|z|} \right| < \delta\}$$

で消えないと仮定する. このとき

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Coker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$$

従って  $\text{ind}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$  となる.

実際, 上の仮定と定理1を合わせると 原点に十分近い位置の  $\bar{z} \neq 0$  と  $\zeta = \bar{z}$  に対して  $P$  は  $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n, (z, \zeta)}^{\mathbb{R}}$  で可逆であることがわかり 補題2の仮定がみたされ 定理3の結論が  $\bar{z} \neq 0$  に得られる.

定理3の条件をみたす作用素が存在することも知られている ([2], Proposition 1 参照).

#### 文 献

- [1] T. Aoki, Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini, II, à paraître.
- [2] T. Aoki, M. Kashiwara & T. Kawai, On a class of linear differential operators of infinite order with finite index, to appear.
- [3] J. M. Bony & P. Schapira, Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, Inventiones math., 17 (1972), 95-105.
- [4] M. Kashiwara & P. Schapira, Microhyperbolic systems, Acta Math., 142 (1979), 1-55.
- [5] T. Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. 1A, 17 (1970), 467-517.